模块七 函数构造思想

第 1 节 原函数构造（★★★）

内容提要

若题干给出一个含 $f'(x)$ 的不等式，让我们求解另外的与 $f(x)$ 有关的不等式，这类题往往需要从所给不等式出发，构造一个原函数（若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数），并判断其单调性，用单调性来分析与 $f(x)$ 有关的不等式. 下面归纳一些常见的构造.

已知的不等式中所含结构	构造原函数的方法
$xf'(x)+f(x)$	$F(x)=xf(x)$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$
$xf'(x)-f(x)$	$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
$xf'(x)+2f(x)$	$F(x)=x^2f(x)$，$F'(x)=x[xf'(x)+2f(x)]$
$xf'(x)-2f(x)$	$F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$
$f(x)+f'(x)$	$F(x)=\mathrm{e}^xf(x)$，$F'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$
$f(x)-f'(x)$	$F(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，$F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}$
$f'(x)\sin x+f(x)\cos x$	$F(x)=f(x)\sin x$，$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$
$f'(x)\cos x-f(x)\sin x$	$F(x)=f(x)\cos x$，$F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$
$f'(x)\sin x-f(x)\cos x$	$F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，$F'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$
$f'(x)\cos x+f(x)\sin x$	$F(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，$F'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$

提醒：高中数学并没有系统性地学习不定积分，高考对求导逆运算（构造原函数）的要求并不高，不需要钻研一些特别复杂的构造，掌握常见的几种构造形式即可.

典型例题

类型Ⅰ：加减法构造

【例 1】设偶函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导数 $f'(x)$，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)<2x$，若 $f(2a-2)-f(a-4)\ge 3a^2-12$，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[-2,2]$　（B）$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　（C）$(-\infty,-2]$　（D）$[-2,+\infty)$

解析：由 $f'(x)<2x$ 想到构造原函数，$f'(x)$ 的一个原函数是 $f(x)$，$2x$ 的一个原函数是 x^2，移项构造即可，

由题意，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)<2x$，所以 $f'(x)-2x<0$，设 $g(x)=f(x)-x^2(x\in\mathbf{R})$，

则当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$g'(x)=f'(x)-2x<0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，

再看要解的不等式，往 $g(x)=f(x)-x^2$ 的形式凑，

$f(2a-2)-f(a-4)\ge 3a^2-12$ 可化为 $f(2a-2)-(2a-2)^2\ge f(a-4)-(a-4)^2$，即 $g(2a-2)\ge g(a-4)$ ①，

前面只得出了 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，故不能直接将①化为 $2a-2\le a-4$，需结合题干的奇偶性条件来考虑，

又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $g(x)$ 也是偶函数，故不等式①等价于 $g(|2a-2|)\ge g(|a-4|)$，

结合 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘可得 $|2a-2|\le|a-4|$，解得：$-2\le a\le 2$.

答案： A

【总结】 ①若给出的含 $f'(x)$ 的不等式各部分都容易看出原函数，则直接移项到同一侧，构造原函数即可；②本题若将条件 $f'(x)<2x$ 改为 $\dfrac{f'(x)}{x}<2(x>0)$，你还会做吗？其实只需两端乘以 x，就和本题相同了. 像这种所给不等式中只有 $f'(x)$，没有 $f(x)$ 的情形，常孤立出 $f'(x)$，再构造.

类型Ⅱ：乘除法构造

【例 2】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足：函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$，若 $a=(\sin1)\cdot f(\sin1)$，$b=(\ln3)\cdot f(\ln3)$，$c=2f(2)$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a>c>b$　　（B）$b>a>c$　　（C）$c>a>b$　　（D）$a>b>c$

解析： 函数 $y=f(x+1)$ 关于 $x=-1$ 对称 $\Rightarrow y=f(x)$ 关于 $x=0$ 对称，所以 $f(x)$ 为偶函数，

由所给不等式中的 $f(x)+xf'(x)$ 这一结构想到应构造函数 $y=xf(x)$，

设 $g(x)=xf(x)$，则由 $f(x)$ 为偶函数可得 $g(x)$ 为奇函数，

且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)=f(x)+xf'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上↘，

要比较的 a，b，c 即为 $g(\sin1)$，$g(\ln3)$，$g(2)$，自变量均为正，故需分析 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，

因为 $g(x)$ 为奇函数且在 $(-\infty,0)$ 上↘，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也↘，

又 $0<\sin1<1<\ln3<2$，所以 $g(\sin1)>g(\ln3)>g(2)$，故 $a>b>c$.

答案： D

【变式 1】设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其导函数为 $f'(x)$，满足 $f(x)-xf'(x)>0$，若 $a=4f(1)$，$b=2f(2)$，$c=f(4)$，则（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$c>a>b$　　（C）$b>c>a$　　（D）$c>b>a$

解析： 看到 $f(x)-xf'(x)$ 这种结构，想到构造原函数 $y=\dfrac{f(x)}{x}$，

设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，因为 $f(x)-xf'(x)>0$，所以 $xf'(x)-f(x)<0$，故 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，要比大小的 a，b，c 中涉及 $f(1)$，$f(2)$，$f(4)$，所以先比较 $g(1)$，$g(2)$，$g(4)$，因为 $0<1<2<4$，所以 $g(1)>g(2)>g(4)$，故 $\dfrac{f(1)}{1}>\dfrac{f(2)}{2}>\dfrac{f(4)}{4}$，同乘以 4 可得 $4f(1)>2f(2)>f(4)$，即 $a>b>c$.

答案： A

【反思】 从例 2 和上面的变式 1 可以看出，所给的含 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的不等式中涉及加法，则构造的原函数大概率为两项之积；若是减法，则很可能为两项之商.

【变式 2】设函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且有 $xf'(x)>2f(x)$，则不等式

$4f(x-2022)-(x-2022)^2 f(2)<0$的解集为（　　）

（A）$(0,2023)$　　（B）$(2022,2024)$　　（C）$(2022,+\infty)$　　（D）$(-\infty,2023)$

解析：所给不等式可变形成$xf'(x)-2f(x)>0$，$f(x)$前多了个系数 2，不能构造$\dfrac{f(x)}{x}$，应构造$\dfrac{f(x)}{x^2}$，

由$xf'(x)>2f(x)$得$xf'(x)-2f(x)>0$，设$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，则$g'(x)=\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}>0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上↗，目标中有$f(x-2022)$和$f(2)$，应化为关于$g(x-2022)$和$g(2)$的不等式来解，

在$4f(x-2022)-(x-2022)^2f(2)<0$两端同除以$4(x-2022)^2$可得$\dfrac{f(x-2022)}{(x-2022)^2}-\dfrac{f(2)}{2^2}<0$，

所以$\dfrac{f(x-2022)}{(x-2022)^2}<\dfrac{f(2)}{2^2}$，从而$g(x-2022)<g(2)$，故$0<x-2022<2$，解得：$2022<x<2024$.

答案：B

【反思】构造原函数时应注意，有时要把所给不等式简单变形，才能看出原函数. 例如本题只要在$xf'(x)-2f(x)$上乘个 x，化为$x^2f'(x)-2xf(x)$，就能看出它是$\dfrac{f(x)}{x^2}$求导后的分子.

【例 3】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且$3f(x)+f'(x)<0$，$f(\ln 2)=1$，则不等式$f(x)e^{3x}>8$的解集为（　　）

（A）$(-\infty,2)$　　（B）$(-\infty,\ln 2)$　　（C）$(\ln 2,+\infty)$　　（D）$(2,+\infty)$

解析：要解的不等式中有$f(x)e^{3x}$，这部分求导为$[3f(x)+f'(x)]e^{3x}$，恰好有所给结构，构造的思路就有了，

设$g(x)=f(x)e^{3x}$，则$g'(x)=[3f(x)+f'(x)]e^{3x}$，因为$3f(x)+f'(x)<0$，所以$g'(x)<0$，故$g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上↘，

给了$f(\ln 2)$，当然要算一下$g(\ln 2)$，看能否与要解的不等式联系起来，

$g(\ln 2)=f(\ln 2)e^{3\ln 2}=e^{\ln 8}=8$，所以$f(x)e^{3x}>8\Leftrightarrow g(x)>g(\ln 2)$，结合$g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上↘可得$x<\ln 2$.

答案：B

【反思】若所给的含$f'(x)$的不等式中，$f'(x)$和$f(x)$只有系数的差别，常用e^{mx}来调节. 具体来说，若为$f'(x)+mf(x)$，则构造$f(x)e^{mx}$；若为$f'(x)-mf(x)$，则构造$\dfrac{f(x)}{e^{mx}}$.

强化训练

1.（2023・西安模拟・★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数$f(x)$满足$f(1)=3$，且$f(x)$的导函数$f'(x)$恒有$f'(x)<2(x\in\mathbf{R})$，则不等式$f(x)<2x+1$的解集为（　　）

（A）$(1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-1)$　　（C）$(-1,1)$　　（D）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2.（2023•广州一模•★★★）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数为 $f'(x)$，若 $xf'(x)-1<0$，$f(\mathrm{e})=2$，则关于 x 的不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1$ 的解集为_____.

3.（2022•怀化模拟•★★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}<0$，若 $a=2f(1)$，$b=f(2)$，$c=4f(\dfrac{1}{2})$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c<b<a$　（B）$c<a<b$　（C）$a<b<c$　（D）$b<a<c$

4.（2023・天津模拟・★★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $2f(x)+xf'(x)>0$ 成立，且 $f(2)=\dfrac{1}{2}$，则不等式 $f(x)-\dfrac{2}{x^2}>0$ 的解集为（　　）

（A）$(2,+\infty)$　（B）$(-2,0)\cup(0,2)$　（C）$(0,2)$　（D）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

5.（2023・郑州模拟・★★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(-x)=f(2+x)$，$f(2)=1$，则不等式 $f(x)<\mathrm{e}^x$ 的解集为（　　）

（A）$(-2,+\infty)$　（B）$(0,+\infty)$　（C）$(1,+\infty)$　（D）$(2,+\infty)$

6.（2023・四省联考・★★★）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时，有（　　）

（A）$f(x)<g(x)$　（B）$f(x)>g(x)$　（C）$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$　（D）$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$

7.（2023 •绵阳模拟 •★★★★）设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)+f'(x)>2$，$f(0)=2024$，则不等式 $f(x)>2+\frac{2022}{e^{x}}$ 的解集为（　　）

（A）$(2020,+\infty)$　　（B）$(0,+\infty)$　　（C）$(2022,+\infty)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(2020,+\infty)$

8.（2022・重庆模拟・★★★★）已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f(x)=f(-x)$，且对任意的 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$f'(x)\cos x>f(-x)\sin(-x)$，则下列不等式成立的是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}f(-\frac{1}{2})<f(-\frac{\pi}{6})\cos\frac{1}{2}$　　（B）$f(-\frac{\pi}{6})>\frac{\sqrt{6}}{2}f(-\frac{\pi}{4})$

（C）$f(-1)<\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})\cos 1$　　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}f(\frac{\pi}{4})>f(-\frac{\pi}{3})$